第12講　図形と方程式(2)

1 [1]　点Pが円 $x^2-2x+y^2-2y-18=0$ の上を動くとき，点A(4，1)との距離APの最小値と最大値を求めよ．

[2]　原点Oを中心とする半径2の円に，点P(4，0)から引いた2本の接線の接点のうち，第1象限にある点をA，残りの点をBとする．直線ABが x 軸と交わる点をCとする．Cから直線APに引いた垂線とAPの交点をDとする．

(1)　線分APの長さを求めよ．

(2)　線分CDの長さを求めよ．

(3)　3点P，C，Dを通る円の方程式を求めよ．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 ［1］ k を定数とし，方程式 $x^2+y^2+3kx-ky-10k-20=0$ で表される座標平面内の円 C について，次の各問いに答えよ．

(1) 円 C は k の値によらず，ある 2 つの定点を通る．この 2 点の座標を求めよ．

(2) k が変化するとき，円 C の面積 S の最小値とそのときの k の値を求めよ．

［2］ 直線 l：$(1+\sqrt{3})x+(1-\sqrt{3})y=4$ が，曲線 C：$x^2+y^2=r^2$ （$r>0$，$x\geqq 0$）に接する．

(1) r の値を求めよ．

(2) 点 $\mathrm{A}(a,\ 1)$ が直線 l 上の点であるとき，a の値を求めよ．また，点 A から曲線 C に引いた l 以外の接線 m の方程式を求めよ．

(3) 曲線 C と 2 つの接線 l，m で囲まれた図形の面積を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　Oを原点とする座標平面上の円 C : $x^2+y^2=1$ と直線 $x+2y=1$ の交点のうち，x 座標の小さい方をP，他方をQとする．点P，Qにおける円 C の接線をそれぞれ l，m とする．次の問いに答えよ．

(1)　P，Qの座標を求めよ．また，l と m の交点Rの座標を求めよ．

(2)　線分ORと C の交点をSとする．Sの座標を求めよ．また，△QRSの面積を求めよ．

(3)　∠PQS＝∠RQSであることを示せ．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 12 講　図形と方程式(2)

直線 $x+2y=9$ との距離が最小となる円 $x^2+y^2=4$ 上の点の座標は

$\left(\dfrac{\boxed{ア}\sqrt{\boxed{イ}}}{\boxed{ウ}},\ \dfrac{\boxed{エ}\sqrt{\boxed{オ}}}{\boxed{カ}}\right)$ であり，そのときの距離は

$\dfrac{\boxed{キ}\sqrt{\boxed{ク}}}{\boxed{ケ}}-\boxed{コ}$ である．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第12講　図形と方程式(2)

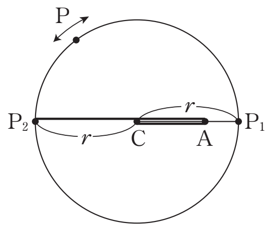
1 ［1］ 点Pが円 $x^2-2x+y^2-2y-18=0$ の上を動くとき，点A(4, 1)との距離APの最小値と最大値を求めよ．

$x^2-2x+y^2-2y-18=0$ より　$(x-1)^2+(y-1)^2=20$

この円の中心をC，半径を r とすると　C(1, 1)，$r=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

AC＝3より　AC＜r　よって，点Aは円の内部にある．

Aを通る円の直径の両端のうち，Cに関してAと同じ側にある点をP_1，Aと反対側にある点をP_2とする．



APの 最小値は　$AP_1=r-AC=$ **$2\sqrt{5}-3$**

最大値は　$AP_2=r+AC=$ **$2\sqrt{5}+3$**

1 ［2］ 原点Oを中心とする半径2の円に，点P(4, 0)から引いた2本の接線の接点のうち，第1象限にある点をA，残りの点をBとする．直線ABが x 軸と交わる点をCとする．Cから直線APに引いた垂線とAPの交点をDとする．

(1) 線分APの長さを求めよ．

(2) 線分CDの長さを求めよ．

(3) 3点P，C，Dを通る円の方程式を求めよ．

(1) 三平方の定理により　$AP=\sqrt{OP^2-OA^2}=\sqrt{16-4}=$ **$2\sqrt{3}$**

【別解】 方べきの定理により　$AP^2=2\times6$　よって　**$AP=2\sqrt{3}$**

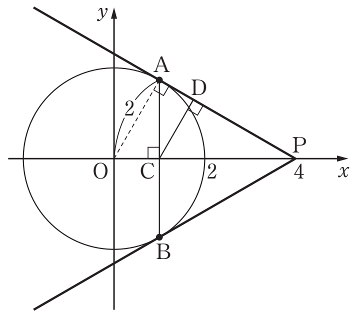
(2) 図形の対称性より　AB⊥OP

△OAP∽△OCAより　OA：OC＝OP：OA

2：OC＝4：2　　OC＝1

よって　PC＝3

△OAP∽△CDPより　$CD=\dfrac{3}{4}OA=$ **$\dfrac{3}{2}$**



(3) △PCDは∠D＝90°の直角三角形より，CPは求める円の直径である．

よって，その中心はCPの中点 $\left(\dfrac{5}{2},\ 0\right)$，半径は $\dfrac{1}{2}CP=\dfrac{3}{2}$

ゆえに，求める円の方程式は　**$\left(x-\dfrac{5}{2}\right)^2+y^2=\dfrac{9}{4}$**

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 ［1］ k を定数とし，方程式 $x^2+y^2+3kx-ky-10k-20=0$ で表される座標平面内の円 C について，次の各問いに答えよ．

(1) 円 C は k の値によらず，ある 2 つの定点を通る．この 2 点の座標を求めよ．

(2) k が変化するとき，円 C の面積 S の最小値とそのときの k の値を求めよ．

(1) C の式は　$(3x-y-10)k+x^2+y^2-20=0$　と変形できる．

これがすべての実数 k で成立するのは　$3x-y-10=0$　かつ　$x^2+y^2-20=0$　のとき．

これらより y を消去すると

$x^2+(3x-10)^2-20=0$　　$x^2-6x+8=0$　　$(x-2)(x-4)=0$

よって　$(x,\ y)=(2,\ -4),\ (4,\ 2)$

したがって，円 C は k の値によらず定点 **(2，−4)**，**(4，2)** を通る．

(2) $C:\left(x+\dfrac{3}{2}k\right)^2+\left(y-\dfrac{k}{2}\right)^2=\dfrac{5}{2}k^2+10k+20$

よって，円 C の面積は　$S=\dfrac{5}{2}(k^2+4k+8)\pi=\dfrac{5}{2}\pi\{(k+2)^2+4\}$

したがって　$\boldsymbol{k=-2}$　のとき S は　最小値　$\boldsymbol{10\pi}$　をとる．

【別解】 C は定点 $(2,\ -4)$，$(4,\ 2)$ を通る円である．この 2 点を通る最も小さい円はこの 2 点を直径の両端とするものである．その中心は 2 点の中点 $(3,\ -1)$，半径は $\sqrt{10}$

よって，その方程式は　$(x-3)^2+(y+1)^2=10$　つまり　$x^2+y^2-6x+2y=0$

これを　$x^2+y^2+3kx-ky-10k-20=0$　と比較すると，$k=-2$ である．

したがって　$\boldsymbol{k=-2}$　のとき円 C の面積 S は　最小値　$\boldsymbol{10\pi}$　をとる．

2 ［2］ 直線 $l:(1+\sqrt{3})x+(1-\sqrt{3})y=4$ が，曲線 $C:x^2+y^2=r^2$（$r>0$，$x\geqq 0$）に接する．

(1) r の値を求めよ．

(2) 点 $\mathrm{A}(a,\ 1)$ が直線 l 上の点であるとき，a の値を求めよ．また，点 A から曲線 C に引いた l 以外の接線 m の方程式を求めよ．

(3) 曲線 C と 2 つの接線 l，m で囲まれた図形の面積を求めよ．

(1) $l:(1+\sqrt{3})x+(1-\sqrt{3})y-4=0$ と円 $x^2+y^2=r^2$ の中心 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ との距離が半径 r と等しい．

よって　$\dfrac{|-4|}{\sqrt{(1+\sqrt{3})^2+(1-\sqrt{3})^2}}=r$　　ゆえに　$\boldsymbol{r=\sqrt{2}}$

l の y 切片は負，x 切片は正，すなわち円と l の接点は第 4 象限に存在するので，このとき l は曲線 C と接している．

(2) $(1+\sqrt{3})x+(1-\sqrt{3})y=4$　に $(x,\ y)=(a,\ 1)$ を代入して

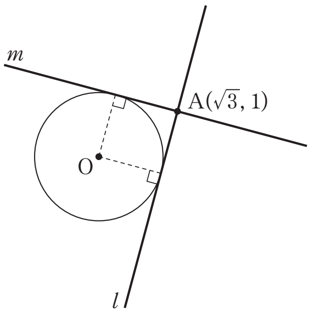
$(1+\sqrt{3})a+1-\sqrt{3}=4$　　よって　$a=\dfrac{3+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{1+\sqrt{3}}=\boldsymbol{\sqrt{3}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

A$(\sqrt{3}, 1)$ を通る接線 m は y 軸に平行でなく，第1象限で円と接するので

$y=k(x-\sqrt{3})+1$　つまり　$y=kx-\sqrt{3}k+1$　とおける．

変形して　$kx-y-\sqrt{3}k+1=0$　これと円 $x^2+y^2=2$ が接するので



$$\frac{|-\sqrt{3}k+1|}{\sqrt{k^2+1}}=\sqrt{2} \qquad |\sqrt{3}k-1|=\sqrt{2}\sqrt{k^2+1}$$

$$(\sqrt{3}k-1)^2=2(k^2+1)$$

$$k^2-2\sqrt{3}k-1=0 \quad \cdots\cdots①$$

①の解のうち，1解が l の傾き　$\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}=\sqrt{3}+2$　より，もう1解は解と係数の関係から　$k=\sqrt{3}-2$　である．

よって　m：$\boldsymbol{y=(\sqrt{3}-2)x+2\sqrt{3}-2}$

(3)　①より l と m の傾きの積は -1　よって　$l\perp m$

したがって，求める面積は　(正方形)$-\left(\dfrac{1}{4}\text{円}\right)=r^2-\dfrac{1}{4}r^2\pi=\boldsymbol{2-\dfrac{\pi}{2}}$

3　O を原点とする座標平面上の円 C：$x^2+y^2=1$ と直線 $x+2y=1$ の交点のうち，x 座標の小さい方を P，他方を Q とする．点 P，Q における円 C の接線をそれぞれ l，m とする．次の問いに答えよ．

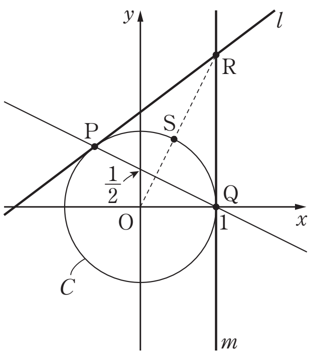
(1)　P，Q の座標を求めよ．また，l と m の交点 R の座標を求めよ．

(2)　線分 OR と C の交点を S とする．S の座標を求めよ．また，△QRS の面積を求めよ．

(3)　∠PQS＝∠RQS であることを示せ．

---

(1)　C：$x^2+y^2=1$　と　$x+2y=1$　より x を消去して



$$(1-2y)^2+y^2=1 \qquad 5y^2-4y=0 \qquad y=0,\ \frac{4}{5}$$

よって　$\mathbf{P}\left(-\dfrac{3}{5},\ \dfrac{4}{5}\right)$，$\mathbf{Q(1,\ 0)}$

P，Q における円 C の接線はそれぞれ

$$-\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y=1,\ x=1$$

よって　l：$3x-4y+5=0$　　m：$x=1$

したがって　$\mathbf{R(1,\ 2)}$

(2)　OR：$y=2x$　これと C：$x^2+y^2=1$　より y を消去して　$x^2+4x^2=1$　　$x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

図より　$\mathbf{S}\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}},\ \dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$　　△QRS$=\dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)=\dfrac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}}=\boldsymbol{\dfrac{5-\sqrt{5}}{5}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(3)　PQ と OR の交点を M とすると，図形の対称性より M は PQ の中点であり，$\mathrm{OR}\perp\mathrm{PQ}$ である．

$\triangle\mathrm{OQM}\backsim\triangle\mathrm{ORQ}$ であり，$\mathrm{OR}=\sqrt{5}$ より　$\mathrm{OM}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\mathrm{OQ}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

よって　$\mathrm{MS}=\mathrm{OS}-\mathrm{OM}=1-\dfrac{1}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}}$

また　$\mathrm{SR}=\mathrm{OR}-\mathrm{OS}=\sqrt{5}-1$

したがって　$\mathrm{MS}:\mathrm{SR}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}:1$

一方　$\mathrm{QM}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}\mathrm{OQ}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$，$\mathrm{QR}=2$ より　$\mathrm{QM}:\mathrm{QR}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}:1$

よって　$\mathrm{MS}:\mathrm{SR}=\mathrm{QM}:\mathrm{QR}$　より　$\angle\mathrm{PQS}=\angle\mathrm{RQS}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

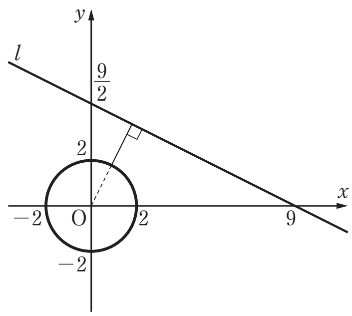
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第12講　図形と方程式(2)

直線 $x+2y=9$ との距離が最小となる円 $x^2+y^2=4$ 上の点の座標は

$\left(\dfrac{\boxed{ア}\sqrt{\boxed{イ}}}{\boxed{ウ}},\ \dfrac{\boxed{エ}\sqrt{\boxed{オ}}}{\boxed{カ}}\right)$ であり，そのときの距離は

$\dfrac{\boxed{キ}\sqrt{\boxed{ク}}}{\boxed{ケ}}-\boxed{コ}$ である．



直線 l：$x+2y=9$ との距離が最小となる円上の点は，直線 l と垂直で円の中心を通る直線と，円との交点のうち第１象限にある点である．

円の中心 $(0,\ 0)$ を通り，直線 l に垂直な直線の方程式は $y=2x$ である．これと円：$x^2+y^2=4$ の交点は

$$x^2+4x^2=4 \qquad x^2=\frac{4}{5}\ より\quad x=\pm\frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$x>0\ より\quad x=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

よって，求める点の座標は $\left(\mathbf{\dfrac{2\sqrt{5}}{5}},\ \mathbf{\dfrac{4\sqrt{5}}{5}}\right)$

また，このときの距離は，円の中心と直線 l の距離から円の半径を除いたものである．

よって，求める距離は $\dfrac{|-9|}{\sqrt{1+4}}-2=\mathbf{\dfrac{9\sqrt{5}}{5}-2}$

ⓒRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。